Aula 9.

Lembrete: 1) Sejam H um esp. de Hilbert e

$A \in B_0(H)$ ← auto-adjunto $\Rightarrow$ $H = \underbrace{N(A) \oplus N(\lambda_1 - A) \oplus N(\lambda_2 - A) \oplus \ldots}$ ← soma ortogonal

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ é sequência dos autovalores distintos de A. (T. de Hilbert-Schmidt)

Se A não for auto-adjunto, isso é falso, de fato, considere $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \mathbb{C}^2 \neq N(A)$

2) Assume que $\dim H < \infty$ e $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda_j\}_1^K$, onde λ_j são distintos. (Já que $\dim H < \infty$)

Existe uma base em H tal que a matriz de A nessa base possui forma normal de Jordan J_A

$$J_A = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ 0 & & \lambda_j & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_j \; 1 \end{bmatrix}}_{T_j \in \mathbb{C}^{m \times m}} \right)$$

Seja $M_j = \operatorname{span}\{$vetores de base que correspondem aos blocos $T_j\}$ ← pode ter vários blocos T_j correspondentes ao λ_j

$\Rightarrow H = \bigoplus_{j=1}^{K} M_j$ (0) (uma decomposição análoga ao caso do operador compacto)

Observe que M_j é invariante sob ação de A e $\sigma(A|_{M_j}) = \{\lambda_j\}$.

Mostremos que para achar o espaço M_j, um não precisa saber a base de Jordan.

Provaremos que $M_j = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right)H =$ ②

$= R\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(\lambda-A)^{-1}d\lambda\right)$ (1), onde Γ_j é um contorno ao redor de λ_j que separa λ_j dos autovalores restantes. (seja $\Gamma_j = \{|\lambda - \lambda_j| = \varepsilon\}$)

Observe primeiro que $(\lambda - T_j)^{-1} = \begin{bmatrix} (\lambda-\lambda_j)^{-1} & (\lambda-\lambda_j)^{-2} & \cdots & (\lambda-\lambda_j)^{-m} \\ & (\lambda-\lambda_j)^{-1} & & \vdots \\ & & \ddots & (\lambda-\lambda_j)^{-2} \\ 0 & & & (\lambda-\lambda_j)^{-1} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ por Teorema de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(\lambda - T_j)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\begin{bmatrix} \int_{\Gamma_j}(\lambda-\lambda_j)^{-1}d\lambda & \cdots & \int_{\Gamma_j}(\lambda-\lambda_j)^{-m}d\lambda \\ & \ddots & \vdots \\ & & \int_{\Gamma_j}(\lambda-\lambda_j)^{-1}d\lambda \end{bmatrix} =$$

$= I_{m\times m}$

Do outro lado, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_s}(\lambda - T_j)^{-1}d\lambda = O_{m\times m}$ se $s \neq j$.

Finalmente, $\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(\lambda-A)^{-1}d\lambda\right]x = \begin{cases} x & \text{se } x \in M_j \\ 0 & \text{se } x \in M_s, s \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow$ (1) vale.

Ideia é mostrar que formula (1) pode ser usada no caso da dimensão infinita para obter decomposições espectrais similares à (0)

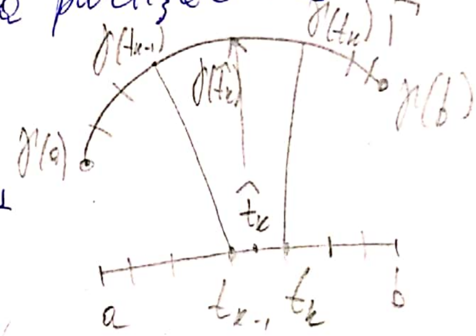
Integral de contorno de função-vetor

Def 1 Sejam E um esp de Banach, Γ uma curva simples retificável em $\mathbb{C}$ com parametrização $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, $g:\Gamma\to E$ y uma função $\Rightarrow$

na norma de E

$$\int_\Gamma g(\lambda)\,d\lambda = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\gamma(\hat{t}_k))\,\underbrace{\Delta\gamma_k}_{=\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})},$$

onde $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ é uma partição de $[a,b]$.



Observação 1) Se Γ for de classe C^1

$$\Rightarrow \int_\Gamma g(\lambda)\,d\lambda = \int_a^b g(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

2) Seja $y^*\in E^* \Rightarrow \left\langle \int_\Gamma g(\lambda)\,d\lambda, y^*\right\rangle = \int_\Gamma \langle g(\lambda), y^*\rangle\,d\lambda$ (1e)

Já que y^* é contínuo.

Def 2 Sejam $\Omega\subset\mathbb{C}$ aberto e $\Omega\neq\emptyset$, E um esp. de Banach, $g:\Omega\to E$ é dita <u>analítica</u> em $\lambda_0\in\mathbb{C}$ se $\exists$ uma vizinhança U de λ_0 tal que $U\subset\Omega$ e

$$g(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n g_n,\quad \lambda\in U,\ g_n\in E \qquad (2)$$

converge em E

Corolário 1 Seja $g:\Omega\to E$ analítica e $\Gamma\subset\Omega$ é uma curva fechada, simples, retificável, e positivamente orientada $\Rightarrow$

$$g(\lambda_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda-\lambda_0}\,g(\lambda)\,d\lambda, \quad \text{onde } \lambda_0\in \operatorname{int}(\Gamma)$$

<u>Demonstração</u> Seja $y^* \in E^*$ $\Rightarrow$ $\langle g(\lambda), y^* \rangle : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica $\Rightarrow$ por fórmula de Cauchy usual, temos

$$\langle g(\lambda_0), y^* \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \langle g(\lambda), y^* \rangle \, d\lambda .$$

Agora, de (1a) $\Rightarrow$ $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \langle g(\lambda), y^* \rangle \, d\lambda =$

$$= \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_0} g(\lambda) \, d\lambda , \; y^* \right\rangle \Rightarrow$$

$$\langle g(\lambda_0), y^* \rangle = \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_0} g(\lambda) \, d\lambda , \; y^* \right\rangle, \; \forall y^* \in E^*$$

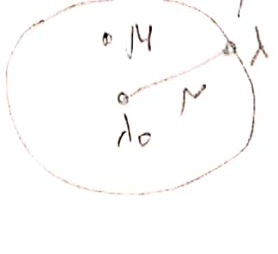
$$\Rightarrow \quad g(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_0} g(\lambda) \, d\lambda . \quad (3)$$

<u>Def 3</u> Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto, $\Omega \neq \emptyset$, E um esp. de B., $g : \Omega \to E$ $\Rightarrow$ g é dito derivável em Ω se $\forall \lambda_0 \in \Omega$ a derivada

$$g'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} (g(\lambda) - g(\lambda_0)) \text{ existe em } E.$$

<u>Observação</u> É fácil ver que g analítica em Ω é derivável em Ω. Mostremos que recíproca também é verdadeira.

De fato seja $\lambda_0 \in \Omega$ e $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = r\}$ t.q. $\Gamma \subset \Omega$. De (3) temos



$$g(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \mu} g(\lambda) \, d\lambda , \quad (4)$$

$$|\mu - \lambda_0| < r$$

Agora $\frac{1}{\lambda-\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}} (\mu-\lambda_0)^n$ (5), $\lambda \in \Gamma$

$|\mu-\lambda_0| < r$

(De fato $\frac{1}{\lambda-\mu} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)\left(1 - \frac{\mu-\lambda_0}{\lambda-\lambda_0}\right)}$,

$\left|\frac{\mu-\lambda_0}{\lambda-\lambda_0}\right| < 1$)

$$(4)+(5) \Rightarrow g(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}(\mu-\lambda_0)^n\right) g(\lambda)\, d\lambda \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Gamma \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}(\mu-\lambda_0)^n g(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(\mu-\lambda_0)^n \int_\Gamma \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}} g(\lambda)\, d\lambda \;.\Rightarrow g \text{ é analítica em } \Omega.$$

O passo (*) está justificado por convergência uniforme da série já que $\left\|\frac{g(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}\right\| \le C$ e

$$\left|\frac{\mu-\lambda_0}{\lambda-\lambda_0}\right| = \rho < 1 \Rightarrow \left\|\frac{(\mu-\lambda_0)^n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}} g(\lambda)\right\| \le C\cdot\rho^n.$$

Observação Sejam E_1, E_2 esp. de Banach e Γ uma curva simples retificável e $g: \Gamma \to B(E_1, E_2)$

$$\Rightarrow \left(\int_\Gamma g(\lambda)\, d\lambda\right)x = \int_\Gamma g(\lambda)x\, d\lambda, \quad \forall x \in E_1.$$

Além disso, se $A \in B(\tilde{E}_1, E_1)$, $T \in B(E_2, \tilde{E}_2)$, onde $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ são esp. de Banach $\Rightarrow$

$$B\left(\int_\Gamma g(\lambda)\, d\lambda\right)A = \int_\Gamma B g(\lambda) A\, d\lambda.$$

Сканировано с CamScanner

Decomposição espectral e projeção de Riesz.

Def 4 — Seja $A \in B(E)$ num espaço de Banach E. O conjunto $\sigma \subset \sigma(A)$ é dito a parte isolada do espectro do A se σ e $\tau = \sigma(A) \setminus \sigma$ são subespaços fechados do $\sigma(A)$.

Seja σ parte isolada de $\sigma(A)$ e $\Gamma \subset \rho(A)$ uma curva simples fechada e retificável tal que $\sigma \subset \mathrm{int}(\Gamma)$ e $\tau = \sigma(A) \setminus \sigma \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{int}(\Gamma)}$. Assume-se também que Γ é positivamente orientada.

Definimos projeção de Riesz:

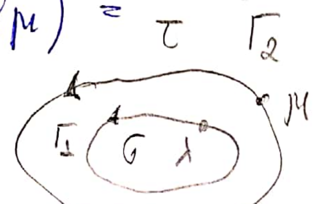
$$P_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

Observe que P_σ não depende de Γ já que $(\lambda - A)^{-1}$ é analítica em $\rho(A)$ (veja generalização do Teorema de Cauchy)

Lema 1. P_σ é projeção, ou seja $P_\sigma^2 = P_\sigma$.

Demonstração Sejam Γ_1 e Γ_2 duas curvas da definição da proj. de Riesz tais que $\Gamma_1 \subset \mathrm{int}(\Gamma_2)$. $\Rightarrow$

$$P_\sigma^2 = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (\mu - A)^{-1} d\mu\right) =$$



$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} d\mu\, d\lambda$$

Lembre que $(\lambda-A)^{-1}-(\mu-A)^{-1}=(\mu-\lambda)(\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}$ 7

$\Rightarrow P_\sigma^2 = Q - R$, onde

$$Q=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\mu-\lambda}(\lambda-A)^{-1}d\mu\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda-A)^{-1}\Big(\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\mu-\lambda}I\, d\mu}_{\text{Formula de Cauchy}}\Big)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda-A)^{-1}d\lambda = P_\sigma$$ e

$$R=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\mu-\lambda}(\mu-A)^{-1}d\mu\, d\lambda =$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\mu-\lambda}(\mu-A)\,d\lambda\, d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\mu-A)^{-1}\Big(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\mu-\lambda}I\, d\lambda}_{\text{T. integral de Cauchy}}}^{=0\ (\mu\in ext(\Gamma_1))}\Big)d\mu = 0$$

Note que troca das integrais é devido a continuidade de $\frac{1}{\mu-\lambda}(\mu-A)^{-1}$ em $\Gamma_1\times\Gamma_2$.

Finalmente $P_\sigma^2 = P_\sigma \Rightarrow P_\sigma$ é projeção.

Teorema 1 Seja σ parte isolada de $\sigma(A)$ e $M=R(P_\sigma)=P_\sigma(E)$, $L=N(P_\sigma) \Rightarrow E=M\oplus L$, M e L são subesp. A-invariantes e $\sigma(A|M)=\sigma$, $\sigma(A|L)=\sigma(A)\setminus\sigma=\tau$.

Demonstração Observe que P_σ é limitado (de fato $\|P_\sigma\|\le\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\|(\lambda-A)^{-1}\|d\lambda\le\frac{1}{2\pi}|\Gamma|\cdot\max_\Gamma\|(\lambda-A)^{-1}\|$)

$\Rightarrow$ Já que P_σ é projeção limitada, M e L são fechados e $E=M\oplus L$ (veja Lema 2.16 da aula 6)

Observe que $A(\lambda-A)^{-1}=(\lambda-A)^{-1}A$, $\lambda\in\rho(A) \Rightarrow$

$AP_\sigma = P_\sigma A \Rightarrow M$ e L são invariantes.

De fato, seja $x\in M = R(P_\sigma) \Rightarrow x = P_\sigma y \Rightarrow$

$Ax = AP_\sigma y = P_\sigma A y \Rightarrow Ax\in R(P_\sigma)$.

Do outro lado, seja $x\in L = N(P_\sigma) \Rightarrow P_\sigma x = 0$

$\Rightarrow P_\sigma A x = AP_\sigma x = 0 \Rightarrow Ax\in N(P_\sigma)$.

Seja Γ da definição de P_σ e $\mu\notin\Gamma$. Definimos

$$S(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\mu-\lambda}(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda$$

Note que P_σ comuta com $(\lambda-A)^{-1}$. De fato,

$AP_\sigma = P_\sigma A \Rightarrow (\lambda-A)P_\sigma = P_\sigma(\lambda-A) \Rightarrow$

$P_\sigma = (\lambda-A)^{-1}P_\sigma(\lambda-A) \Rightarrow P_\sigma(\lambda-A)^{-1} = (\lambda-A)^{-1}P_\sigma$

$\Rightarrow P_\sigma$ comuta com $S(\mu) \Rightarrow M$ e L são invariantes para $S(\mu)$.

$A-\mu \pm \lambda$

Temos $S(\mu)(A-\mu) = (A-\mu)S(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\mu-\lambda}(A-\mu)(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma -\frac{1}{\mu-\lambda}\, I\, d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-A)^{-1}\,d\lambda = \begin{cases} I-P_\sigma, & \mu\in \mathrm{int}(\Gamma)\\ -P_\sigma, & \mu\in \mathrm{ext}(\Gamma)\end{cases}$$

pode assumir isso sem perda da generalidade

Suponha agora que $\mu\notin\sigma$ e $\mu\in \mathrm{ext}(\Gamma) \Rightarrow$

$(A-\mu)S(\mu)x = S(\mu)(A-\mu)x = -x$, $x\in M$ (6)

Logo $(A-\mu)|_M \in B(M)$ é bijetor (use o fato que $S(\mu)M\subseteq M$). Da (6) $\Rightarrow ((\mu-A)|_M)^{-1} = S(\mu)|_M$ é limitado

$\Rightarrow \mu\in\rho(A|_M) \Rightarrow \mathbb{C}\setminus\sigma \subseteq \mathbb{C}\setminus\sigma(A|_M) \Rightarrow$

$\sigma(A|M) \subseteq \sigma$. Similarmente $\sigma(A|L) \subseteq \tau$

De fato, pegue $\mu \notin \tau$. Pode assumir que $\mu \in \mathrm{int}(\Gamma)$

$\Rightarrow (A-\mu)S(\mu)x = S(\mu)(A-\mu)x = (I-P_\sigma)x = x$,

$x \in L = N(P_\sigma) = R(I-P_\sigma) \Rightarrow$

$(A-\mu)|_L \in B(L)$ é bijetor e $\left((A-\mu)|L\right)^{-1} = S(\mu)|L$

$\Rightarrow \mu \in \rho(A|L) \Rightarrow \sigma(A|L) \subseteq \tau$.

Reciprocamente Seja $\lambda \notin \sigma(A|M) \cup \sigma(A|L) \Rightarrow$ $\lambda - A|M$ e $\lambda - A|L$ são bijetores $\Rightarrow$ $\lambda - A$ é bijetor $\Rightarrow \lambda \in \rho(A) \Rightarrow \mathbb{C} \setminus \left(\sigma(A|M) \cup \sigma(A|L)\right) \subseteq$

$\subseteq \rho(A) \Rightarrow \sigma \cup \tau = \sigma(A) \subseteq \underbrace{\sigma(A|M)}_{\subseteq \sigma} \cup \underbrace{\sigma(A|L)}_{\subseteq \tau}$

Mostremos que $\sigma \subseteq \sigma(A|M)$. Suponha que $\lambda_0 \in \sigma$ e $\lambda_0 \in \sigma(A|L) \Rightarrow \lambda_0 \in \tau$, mas $\sigma \cap \tau = \emptyset \Rightarrow$

$\sigma \subseteq \sigma(A|M)$. Analogamente $\tau \subseteq \sigma(A|L)$.

Corolário 1) Se $\sigma = \sigma(A) \Rightarrow P_{\sigma(A)} = I$

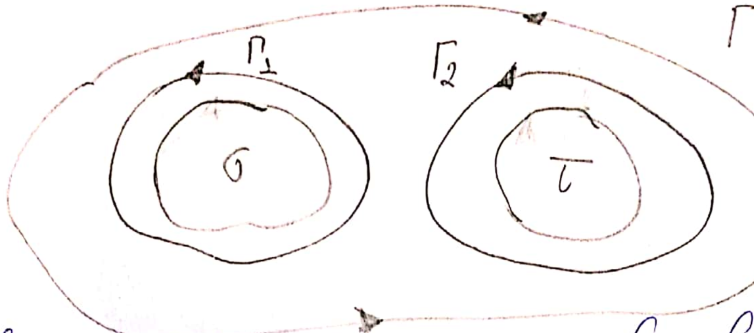
2) $P_\sigma + P_\tau = I$, $P_\sigma \cdot P_\tau = 0$.

Demonstração 1) Temos $\sigma(A|L) = \sigma(A) \setminus \sigma = \emptyset$

$\Rightarrow L = \{0\}$ (Já que espectro do operador limitado é não vasio!)

$\Rightarrow M = E \Rightarrow P_{\sigma(A)} = I$.

2) Sejam $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ 3 curvas simples, fechadas, retificáveis e positivamente orientadas tais que:



para os domínios multiplicamente conexos ✓

Pelo Teorema de Cauchy-Goursat, temos $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda-A)^{-1}d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\lambda-A)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-A)^{-1}d\lambda$

$\Leftrightarrow\ P_\sigma+P_\tau=P_{\sigma(A)}=I.$

Do outro lado, $P_\sigma P_\tau=P_\sigma(I-P_\sigma)=P_\sigma-P_\sigma^2=P_\sigma-P_\sigma=0.$

Proposição 1 Suponha que $E=L\oplus M$, onde L e M são subesp. invariantes fechados para $A\in B(E)\Rightarrow$ $\sigma(A)=\sigma(A|M)\cup\sigma(A|L)$, e se $\sigma(A|M)\cap\sigma(A|L)=\phi\Rightarrow$

$M=R(P_{\sigma(A|M)})$, $L=N(P_{\sigma(A|M)})$ (*)

Demonstração Já que M e L são A-invariantes $\Rightarrow$ $\lambda\in\rho(A)$

$\lambda-A=\begin{bmatrix}\lambda-A|M & 0\\ 0 & \lambda-A|L\end{bmatrix}$ em $E=M\oplus L$

sse $\lambda\in\rho(A|M)\cap\rho(A|L)$ e neste caso $(\lambda-A)^{-1}=\begin{bmatrix}(\lambda-A|M)^{-1} & 0\\ 0 & (\lambda-A|L)^{-1}\end{bmatrix}$ e portanto

Ou seja $\rho(A)=\rho(A|M)\cap\rho(A|L)$ e portanto

$\sigma(A)=\sigma(A|M)\cup\sigma(A|L)$.

Suponha agora que $\sigma(A|M)\cap\sigma(A|L)=\phi$. Seja Γ uma curva simples, fechada, retificável, positiv-te orientada que separa $\sigma(A|M)$ de $\sigma(A|L)$ $\Rightarrow$

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-A|M)^{-1}d\lambda=I_M$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-A|L)^{-1}d\lambda=0$ ← Teorema integral de Cauchy

fórmula integral de Cauchy

$\Rightarrow\quad P_{\sigma(A|M)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-A)^{-1}d\lambda=\begin{bmatrix}I_M & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow$ (*)